UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

ECOLE SUPÉRIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATÉRIAUX

EPREUVES D' ADMISSION 1984 OPTIONS T, TA, M, M', P, P'

MATHEMATIQUES

DUREE 4 H COEFFICIENT 4

Les deux problèmes sont indépendants et comptent chacun pour moitié dans la note de l'épreuve. Chaque problème sera rédigé sur une copie séparée portant clairement le numéro du problème.

La correction tiendra compte de la qualité de la rédaction.

PROBLEME N° 1

Notations : Etant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, une application g de I dans $\mathbb{R}$ et un entier $k > 0$, on dit que g est de classe C^k sur I lorsque g est k fois dérivable sur I et que la dérivée $k^{\text{ième}}$ de g est continue sur I.

1) a) Montrer que, pour tout $x \in]0,\pi[$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1+2\cos 2x+\dots+2\cos 2nx = 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx$$

b) En déduire la valeur de :

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$$

c) Montrer que, pour tout entier $n > 0$,

$$\int_0^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\;\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

2) Démontrer, en effectuant une intégration par partie sur un intervalle fermé borné, que l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

est convergente. Dans la suite on notera :

$$W = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$ On n'essayera pas, dans cette question, de calculer W.

3) a) Soient b un réel positif et f une application de $[0,b]$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $[0,b]$. Pour tout entier n, on pose :

$$I_n = \int_0^b f(x)\sin nx\,dx$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) On considère une application g de $[0,b]$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $[0,b]$, et on définit l'application f sur $[0,b]$ en posant :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\[2ex] g'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $[0,b]$

c) On suppose toujours que g est de classe C^2 sur $[0,b]$ et on rappelle que

$$W = \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

Pour tout entier n, on pose :

$$K_n = \int_0^b g(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx$$

Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{W}.g(0)$.

4) Dans toute cette question, h est une application de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, de de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$.

a) Montrer que :

$$\int_0^\pi h(x)\ \frac{\sin\ (2n+1)x}{\sin\ x}\ dx = \int_0^{\pi/2} \Big(h(x) + h(\pi - x)\Big)\ \frac{\sin\ (2n+1)x}{\sin\ x}\ dx$$

b) On définit la fonction g sur $[0,\pi/_2]$ en posant :

$$g(x) = \begin{cases} h(0) + h(\pi), & \text{si } x = 0 \\ \Big(h(x) + h(\pi - x)\Big)\dfrac{x}{\sin\ x}, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi/_2]$.

c) Pour tout entier n, on pose :

$$L_n = \int_0^\pi h(x)\ \frac{\sin(2n+1)x}{\sin\ x}\ dx$$

Montrer que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{W}.\Big(h(0) + h(\pi)\Big)$.

5) a) En déduire la valeur de $\mathcal{W}$.

b) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

c) Calculer

$$\int_0^\pi x^4 \cos\ 2\ kx\ dx,$$

où k est un entier et en déduire la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

PROBLEME N° 2

Dans tout le problème les matrices sont carrées à coefficients réels.

(A) - Dans cette partie $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ sont des réels distincts, on pose pour t réel

$$f_n(t) = \prod_{i=1}^{n} (r_i - t)$$

Pour a,b,x réels, $a \neq 0$, on définit la matrice $\mathcal{M}_n(a,b,x)$ par :

$$\mathcal{M}_n(a,b,x) = \begin{pmatrix} r_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ a + x & r_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ a + x & \cdots & a + x & r_n + x \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{D}_n(a,b,x)$ son déterminant.

1) a) Montrer qu'il existe des réels λ et μ indépendants de x tels que

$$\mathcal{D}_n(a,b,x) = \lambda\ x + \mu$$

b) On pose $D_n(a,b) = \mathcal{D}_n(a,b,0)$

$M_n(a,b) = \mathcal{M}_n(a,b,0)$

Si $a \neq b$, montrer que $\displaystyle D_n(a,b) = \frac{af_n(b) - bf_n(a)}{a - b}$

c) Montrer que $D_n(a,a) = f_n(a) - af_n'(a)$

2) On désigne par $P_n(X)$ le polynôme caractéristique de $M_n(a,a)$

a) Calculer P_n en fonction de f_n et f_n'

.../...

b) Montrer que :

$$P_n(X) = \prod_{i=1}^{n} (r_i - X - a) \left[1 + a \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i - X - a} \right]$$

3) a) Déterminer, suivant la parité de n, les signes de $P_n(r_1 - a)$ et de $P_n(r_n - a)$

b) Montrer que $P_n(X)$ possède n racines réelles distinctes séparées par les nombres $r_i - a$. (On pourra d'abord envisager le cas où $a > 0$).

Que peut-on en déduire pour $M_n(a,a)$? Etait-ce prévisible ?

4) Soit θ une valeur propre de $M_n(a,a)$

a) On définit le déterminant $\Delta_{n-1}(a,a)$ par :

$$\Delta_{n-1}(a,a) = \begin{vmatrix} r_1 - \theta & a & \cdots & a \\ a & r_2 - \theta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & r_{n-1} - \theta \end{vmatrix}$$

Montrer que $\Delta_{n-1}(a,a)$ est non nul.

b) En déduire un vecteur propre associé à θ.

c) Soient θ_1 et θ_2 deux valeurs propres distinctes de $M_n(a,a)$.

Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i - \theta_1 - a} \cdot \frac{1}{r_i - \theta_2 - a} = 0$$

(B) On suppose dans cette partie les r_i ($1 \leq i \leq n$) réels quelconques. a est toujours un réel non nul.

1) Dans cette question les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_s$ ($s \leq n$) sont égaux à une même valeur r, les nombres $r_s, r_{s+1}, \ldots, r_n$ étant distincts deux à deux.

Montrer que r-a est valeur propre d'ordre s-1 de $M_n(a,a)$

Préciser la position des autres valeurs propres.

2) Soit k le nombre de r_i distincts.

Monter que $M_n(a,a)$ possède k valeurs propres simples séparées par les nombres $r_i - a$. Quelles sont les autres valeurs propres de $M_n(a,a)$? Préciser leur multiplicité. $M_n(a,a)$ est-elle diagonalisable ?

3) a) On choisit ici $n = 6$ et $r_1 < r_2 < r_3$.

Déterminer en fonction de leurs valeurs propres, les vecteurs propres des deux matrices suivantes.

On précisera en particulier les multiplicités des valeurs propres.

$$M = \begin{pmatrix} r_1 & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ a & r_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & r_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & r_3 & a \\ a & \cdots & \cdots & \cdots & a & r_3 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} r_1 & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ a & r_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & r_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & r_2 & a \\ a & \cdots & \cdots & \cdots & a & r_2 \end{pmatrix}$$

b) Application numérique : Donner une base de vecteurs propres et diagonaliser la matrice N lorsque $r_1 = 4$, $r_2 = -4$ et $a = 1$.
